Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ingeniería Mecánica **P.A. 2006-I**
Área de Ciencias Básicas y Humanidades **25-07-2006**

Solucionario del Examen Sustitutorio de Cálculo Numérico (MB535)

Sólo se permite el uso de una hoja de formulario

Pregunta 1

<u>Elija 4 de las 5 subpreguntas</u>:

a) Dada la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \beta+1 & 2 & 2\alpha+\beta+\delta \\ \delta & \alpha+\beta & 1 \end{bmatrix}$$

Para que valores de las constantes, es posible la factorización de Cholesky?

Solucionario

La Matriz debe ser simétrica y definida positiva:
Por simetría:

$\delta = 0$

$\alpha = \beta + 1$

$\alpha + \beta = 2\alpha + \beta + \delta$

$\alpha = 0 \quad \beta = -1$

Reemplazando:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Por Silvester comprobamos que la matriz es definida positiva.

$$\det[1] > 0 \qquad \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} > 0 \qquad \det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Sea el sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 2^2 & 2 & 2^2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 3^2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & n-1 & (n-1)^2 \\ 0 & \cdots & 0 & n^2 & n \end{bmatrix} [x] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2^2 \\ 3^3 \\ \vdots \\ n^n \end{bmatrix}$$

Escriba una rutina en MATLAB para hallar x.

Solución

```
n=input('n=')
r=1:n
r1=1:n-1
r2=2:n
A=diag(r)+diag(r1.^2,1)+diag(r2.^2,-1)
b=(r.^r)'
x=A\b
```

c) Construya la función en Matlab llamada **deriv.m**, que sirve para calcular en forma aproximadas la derivada numérica de primer orden si se conoce como parámetros de entrada la f(x) y el número de puntos para aproximar la derivada (n), el valor a evaluar la derivada (xo), y el paso (h). Use sólo las fórmulas centrales de 3 y 5 puntos.

Solución

```
function d=deriv(f,xo,n,h)
i=-fix(n/2):fix(n/2);
x=xo+i*h;
y=feval(f,x);
switch n
case 3, w=[-1  0  1];d=sum(w.*y)/(2*h);
case 5, w=[1 -8 0 8 -1];d=sum(w.*y)/(12*h);
      otherwise  error(' debe ingresar n=3 o n=5');
end
```

d) ¿Cuantos intervalos necesitamos para aproximar la integral $\int_1^3 \ln(x)dx$ por el método de Simpson con un error $\varepsilon < 0.001$

Solución

$$|E| \le \frac{(b-a)^5 M}{180n^4} < \varepsilon \Rightarrow n > \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5 M}{180\varepsilon}}$$

Calculando M

$$M = \max_{x\in[a,b]}\left|f^{(4)}(x)\right| = \max_{x\in[1,3]}\left|-\frac{6}{x^4}\right| = 6$$

Reemplazando valores $n > 5.7$

Como el número mínimo de subintervalos debe ser par entonces n = 6.

e) La fórmula de cuadratura de Newton – Cotes cerrada está dada por $Q_n(f) = \sum_{j=0}^{n} c_j f(x_j)$

donde los pesos c_j resultantes son: $c_j^{(n)} = h\dfrac{(-1)^{n-j}}{j!(n-j)!}\int_{j=0}^{n}\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}(t-k)dt \qquad h = \dfrac{b-a}{n}$,

Hallar los pesos para la regla de Simpson (n=2)

Solución

$$a_0^{(2)} = \frac{b-a}{2}.\frac{1}{2}\int_0^2 (t-1)(t-2)dt = \frac{b-a}{4}\int_0^2 (t^2-3t+2)dt = \frac{b-a}{6}$$

$$a_1^{(2)} = \frac{b-a}{2}.(-\int_0^2 t(t-2)dt) = \frac{4(b-a)}{6}$$

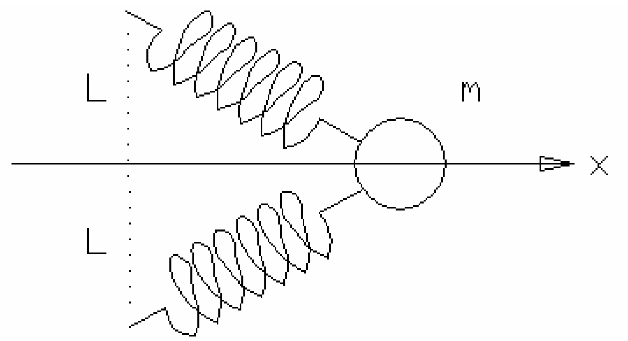
$$a_2^{(2)} = \frac{b-a}{4}.\int_0^2 t(t-1)dt = \frac{b-a}{6}$$

$$\Rightarrow Q_2(f) = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b) \right]$$

Pregunta 2

Una partícula de masa “m” está unida a dos resortes idénticos sobre una mesa horizontal sin fricción. Ambos resortes tienen constante k=8 N/m. Si la partícula se jala una distancia ‘x’ a lo largo de una dirección perpendicular a la configuración inicial de los resortes, entonces la fuerza ejercida sobre los resortes es:

$$F = -2kx\left(1 - \frac{L}{\sqrt{x^2+L^2}}\right) \ \hat{\imath}$$



Si L=0.2 m., para que posición “x” la fuerza tendrá una magnitud de 0.5 N en la dirección negativa del eje “x”. Encuentre la solución con una precisión de 0.001, utilice iteración de punto fijo, si esto no es posible indique porqué y utilice el método de Newton-Raphson. Utilice $x_0=2L$ como aproximación inicial.

Reemplazando los datos:

$$-0.5\,\hat{\imath} = -2(8)x\left(1 - \frac{0.2}{\sqrt{x^2+0.2^2}}\right) \ \hat{\imath}$$

$$0.5 - 16x + \frac{3.2}{\sqrt{x^2+0.04}} = 0$$

$$x_{n+1} = g(x_n) = 0.03125 + \frac{0.2x_n}{\sqrt{x_n^{\,2}+0.04}}$$

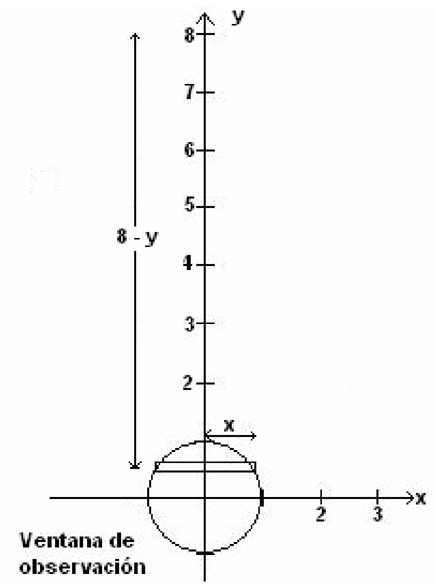
$$|g'(x_0 = 0.4)| = 0.0894 < 1$$

Por lo tanto hay convergencia, tabulando los resultados:

Xn+1
0.2101
0.1761
0.1634
0.1578
0.1551
0.1538
0.1532
0.1529
0.1527

Pregunta 3

Una ventana circular de observación en un buque para la investigación marina tiene un radio de 1 pie, y el centro de la ventana está a 8 pies de distancia del nivel del agua. (Cómo se muestra en la Fig)



a) Utilizar el método de cuadratura Gaussiana con 3 puntos (este resultado tendrá 3 c.d.e) para calcular la fuerza del fluido sobre la ventana (Utilizar la densidad del agua de mar = 64 libra/pie^3). ¿Coincide sus cálculos con el valor exacto?
b) Utilizar la regla del trapecio para 2 intervalos. ¿Que se puede afirmar acerca de la precisión de este resultado?

Solución

De los datos del problema tenemos:
La profundidad $h(y) = 8 - y$
Longitud horizontal de la ventana $L(y) = 2x = 2\sqrt{1-y^2}$ $\quad y \in [-1,1]$
La densidad del agua de mar $w = 64\ Lib/pie^3$.
Luego:

$$F = w\int_a^b h(y)L(y)dy = 64\int_{-1}^{1}(8-y)(2)\sqrt{1-y^2}\,dy = 128\int_{-1}^{1}(8-y)\sqrt{1-y^2}\,dy =$$

$$= 128\left(\int_{-1}^{1} 8\sqrt{1-y^2}\,dy - \int_{-1}^{1} y\sqrt{1-y^2}\,dy\right) = 128*8*\pi/2 - 128*0 = 1608.5$$

a) Utilizando el método de cuadratura Gaussiana con 3 puntos

$$\int_{-1}^{1}(8-y)\sqrt{1-y^2}\,dy = 0.55555*\mathrm{f}(-0.77459) + 0.88888*\mathrm{f}(0) + 0.55555*\mathrm{f}(-0.77459)$$

$$= 12.733$$

$$\Rightarrow F = 128\int_{-1}^{1}(8-y)\sqrt{1-y^2}\,dy \approx 1629.824$$

$$\Rightarrow Error = \left|1629.824 - 1608.5\right| = 21.324$$

El error es grande.

b) Utilizando el método del trapecio para 2 intervalos tenemos:

$$\int_{-1}^{1}(8-y)\sqrt{1-y^2}\,dy \approx 8 \;\Rightarrow F = 128\int_{-1}^{1}(8-y)\sqrt{1-y^2}\,dy \approx 1024$$

La función $f(y)=(8-y)\sqrt{1-y^2}$ no es diferenciable en 1 y -1 por lo tanto la precisión es de poca utilidad.

Pregunta 4

Encuentre la solución aproximada al problema de valor frontera

$$\frac{d^2y}{dx^2}-y=0$$

Con condiciones de frontera: $y(0)=0,\ y'(1)=-1$.

a) Use el método del disparo con h=0.5 y el método de RK-2.
Estime como pendiente inicial s_o=1 y como segunda aproximación a la pendiente inicial s_1=-1. La función para interpolar debe ser E(s_i)= $y'(s_i)$- $y'(1)$.
Nota: Realizar los cálculos hasta obtener la curva aproximada de solución con la nueva pendiente s_2.

b) Use el método de las diferencias finitas y encuentre la curva solución en forma aproximada. (h=0.5).

c) Encuentre el error cometido en cada caso si la solución exacta es $y(x)=\dfrac{-\sinh(x)}{\cosh(1)}$.
Comente sus resultados.

Solución

$$\frac{d^2y}{dx^2}-y=0 \qquad \begin{bmatrix}\dot{y}_1\\ \dot{y}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_2\\ y_1\end{bmatrix} \qquad Y^{(0)}=\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ s_0\end{bmatrix}$$

Algoritmo

$$K1=\begin{bmatrix}y_2\\ y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s_0\\ 0\end{bmatrix} \quad K_2=\begin{bmatrix}y_2\\ y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s_0\\ 0.5s_0\end{bmatrix}$$

$$Y^{(1)}=\begin{bmatrix}0\\ s_0\end{bmatrix}+\frac{h}{2}\begin{bmatrix}s_0 & + & s_0\\ 0 & & 0.5s_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}hs_0\\ \frac{9}{8}s_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.5\\ 1.125\end{bmatrix}$$

$$Y^{(2)}=\begin{bmatrix}0.5\\ 1.125\end{bmatrix}\frac{h}{2}\begin{bmatrix}1.125 & + & 1.125+h*0.5\\ 0.5 & & 0.5+h*1.125\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.125\\ 1.515625\end{bmatrix}\ y'(2,s_o)$$

$$K1=\begin{bmatrix}y_2\\ y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s_1\\ 0\end{bmatrix} \quad K_2=\begin{bmatrix}y_2\\ y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s_1\\ 0.5s_1\end{bmatrix}$$

$$Y^{(1)}=\begin{bmatrix}0\\ s_1\end{bmatrix}+\frac{h}{2}\begin{bmatrix}s_1 & + & s_1\\ 0 & & 0.5s_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}hs_1\\ \frac{9}{8}s_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.5\\ -1.125\end{bmatrix}$$

$$Y^{(2)}=\begin{bmatrix}-0.5\\ -1.125\end{bmatrix}\frac{h}{2}\begin{bmatrix}-1.125 & + & -1.125+h*0.5\\ -0.5 & & -0.5+h*1.125\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1.125\\ -1.515625\end{bmatrix}\ y'(2,s_1)$$

$E(s_o)= y'(s_o)- y'(1)= 1.515625-(-1)= 2.515625$
$E(s_1)= y'(s_1)- y'(1)= -1.515625-(-1)= -0.515625$

$$s_2 = s_1 - E(s_1)\frac{s_0 - s_1}{E(s_0)-E(s_1)} = -0.65979$$

$$K1 = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad K_2 = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_2 \\ 0.5s_2 \end{bmatrix}$$

$$Y^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ s_2 \end{bmatrix} + \frac{h}{2}\begin{bmatrix} s_2 & + & s_2 \\ 0 & & 0.5s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} hs_2 \\ \frac{9}{8}s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.3299 \\ -0.7423 \end{bmatrix}$$

$$Y^{(2)} = \begin{bmatrix} -0.7423 \\ -1 \end{bmatrix}$$

b)

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = h^2 y_i$$
$$y_{i-1} - (2+h^2)y_i + y_{i+1} = 0$$

i=1,2

$$\begin{bmatrix} -(2.25) & 1 \\ 2 & -(2.25) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad y_1 = -0.32653$$
$$y_2 = -0.7347$$

c)

	y rk2	ydiff	yexacta
	0	0	0
	-0.329896907216495	-0.326530612244898	-0.337698039711411
	-0.742268041237114	-0.73469387755102	-0.761594155955765
Error	2.54%	3.53%	

En este caso es mejor RK-2 . (Los errores fueron obtenidos con la norma infinita)

Los Profesores